

ラランデ暦書における1度の里数

千葉商科大学商経学部 渡辺憲昭(watanabe@cuc.ac.jp)

272-8512 千葉県市川市国府台 1-3-1

1. はじめに

『ラランデ暦書』とは、フランスの天文学者ラランドゥ(Lalande)が当時の天文学を集大成して3巻本に著した『Astronomie』をオランダの数学者ストラッベ(Strabbe)がオランダ語に翻訳した『Astronomia of Sterrekunde』のことである。高橋至時はこれを調べ、彼が理解したことおよび彼自身の考えをまとめて『ラランデ暦書管見』を著した。

『ラランデ暦書管見』において高橋至時は、地球は完全な球ではなく南北につぶれた回転楕円体であることを述べている。中山によればこれは、ボイス(Buys)の『新修学芸百科事典』([2])によってそのことを知り、それをラランデ暦書により確かめたものである([1])。また、ボイスの書には地球が回転楕円体の場合の子午線1度の距離の表が掲げてあるが、高橋至時はこの表における数値の誤りについて彼の考えを述べている。さらに彼は、地球が回転楕円体の場合に子午線1度の長さを計算するための彼自身の方法について説明してる。

本稿においては、ボイスの誤りに関する高橋至時の考察、および高橋至時による子午線1度の計算方法について述べる。

2. 地球楕円説に関する至時の認識

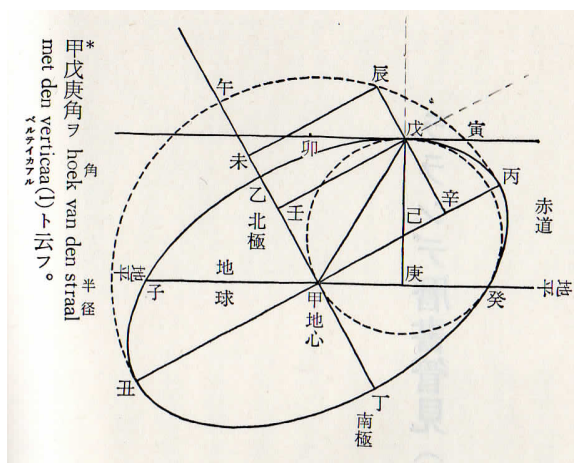


図 1. ラランデ暦書管見における図, 出典[1]

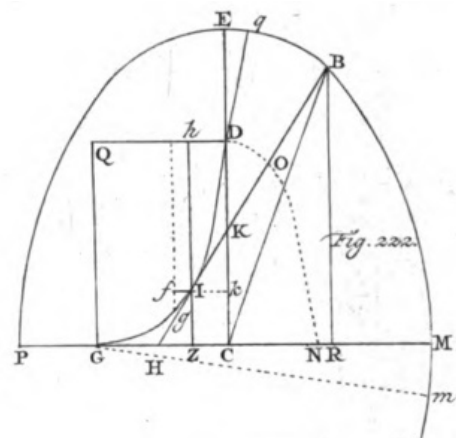


図 2. Sterrekunde における図222, 出典[3]

ボイスの『新修学芸百科事典』第1巻には、地球が回転楕円体であることがイメージ出来

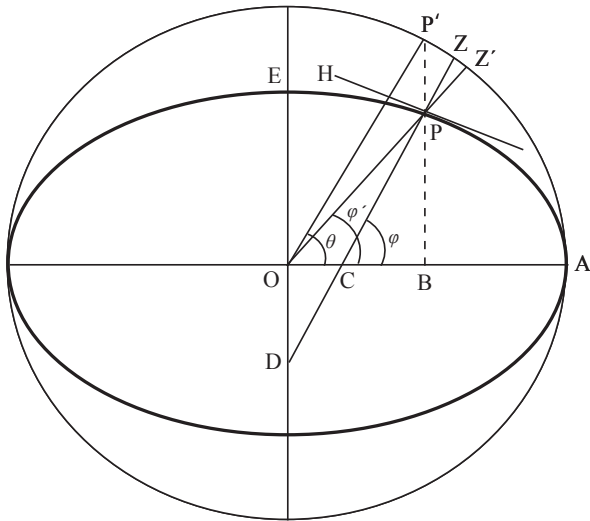
るような図は掲載されていないので、高橋至時が『ラランデ暦書管見』に挿入した楕円体地球図はストラッベの "Sterrekunde" における図222 ([4]) を参考にしたものと考えられる ([1], p.169). 至時は "Sterrekunde" 第3巻 ([3], p.386) から

赤道半径：3281012 極半径 ：3262688

であることも理解した。ただし、ボイスの『百科事典』第1巻 AARDKLOOT dien wy bewoonen(私たちが住んでいる地球)の項目の所にはこの数値はでていない。赤道半径と極半径が上記数値の時、地球の扁平率は 1/179 である。

高橋至時は、地球が回転楕円体である場合、地球上の一点における鉛直線は地球の中心を通らないこと、そして鉛直線と赤道とのなす角度(=天の北極の高度)がその地点の(天文)緯度であることも彼自身による図 1 を用いて説明している。

3. Angle of the Vertical および地心距離



観測によって得られるのは天文緯度 φ があるので、 $\angle OPC = \varphi - \varphi'$ (angle of the vertical という) や地心距離 OP などを求めるためには地心緯度 φ' 、更成緯度 θ と天文緯度との関係式が必要である。

$$a = OA, \quad b = OE, \quad m = b/a$$

PD : 観測地点 P における鉛直線

$r = OP$: 地心距離

ρ : P における子午線の曲率半径

$N = PD$ (: P における卯酉線の曲率半径)

図 3. 天文緯度，地心緯度，更成緯度

$$x = a \cos \theta = r \cos \varphi' = N \cos \varphi \quad (1)$$

$$y = b \sin \theta = r \sin \varphi' = m^2 N \sin \varphi$$

$$\tan \theta = m \tan \varphi, \quad \tan \varphi' = m^2 \tan \varphi \quad (2)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - (1 - m^2) \sin^2 \varphi}}, \quad \rho = \frac{a m^2}{(1 - (1 - m^2) \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (3)$$

$$r = \frac{b}{\sqrt{1 - (1 - m^2) \cos^2 \varphi'}} = \frac{a \sqrt{1 - (1 - m^4) \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - (1 - m^2) \sin^2 \varphi}} \quad (4)$$

(2)の第1式に関して、高橋至時は θ と φ のかわりに θ と φ のそれぞれを余緯度で表した式を掲げている ([1], p.169). また, angle of the vertical は (2) の第2式を用いても得られるが, 次式を用いれば 90° 近辺でも正確に計算出来る:

$$\varphi - \varphi' = \frac{180}{\pi} \arcsin \left(\frac{(1 - m^2) \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - (1 - m^4) \sin^2 \varphi}} \right) \quad (5)$$

"Sterrekunde" 第3巻 ([3], p.386) に, 赤道半径と極半径が上記値の場合の, 10度ごとの緯度における angle of the vertical (Hoek van de straal met den Verticaal) および地心距離が与えてある. この表は Lalande がベルリンと喜望峰での観測値から月の視差を求めた際に計算したものである. この表第4列の Hoeken in de Elliptische Spheroïde (angles dans le sphéroïde elliptique) がどのような角を指すのか, 私にはわからない.

上原『高橋景保の研究』によれば, 至時はこの表の2列目(angle of the vertical)と4列目に納得がいかなかった ([4], p.152 - 153). 上原は同所に2列目と4列目とを計算した値を載せている. 表1は"Sterrekunde" および上原に載っている angle of the vertical の値と, (5) によって計算したangle of the vertical の値である(f は扁平率).

φ	$\varphi - \varphi'$ (Lalande)	$\varphi - \varphi'$ (上原)	$\varphi - \varphi'$ ($f=1/179$)	$\varphi - \varphi'$ ($f=1/230$)
0°	0' 0"	0' 0"	0' 0"	0' 0"
10	5' 20"	6' 56"	6' 33"1	5' 06"1
20	10' 27"	12' 33"	12' 19"6	9' 35"8
30	14' 58"	16' 63"	16' 37"9	12' 56"6
40	18' 17"	18' 95"	18' 56"9	14' 44"4
50	19' 37"	18' 99"	18' 59"1	14' 45"8
60	18' 22"	16' 73"	16' 43"5	13' 00"0
70	14' 18"	12' 43"	12' 26"0	9' 39"6
80	7' 50"	6' 62"	6' 37"3	5' 08"7
90	0' 0"	0' 0"	0' 0"	0' 0"

表 1. angle of the vertical

上原の表では秒の表記を誤っている. たとえば, 10° のところは $6' 56''$ ではなく, $6'.56$ であると思われる. したがって, 小数点以下を秒で表せば $0.56 \times 60 = 33.6$. これは $f = 1/179$ の場合の計算値と(ほぼ)一意する.

表2は "Sterrekunde" に載っている地心距離と (4) 式で計算した地心距離である (単位は toise ; 1 toise $\approx$ 1.95 m). "Sterrekunde" の値と計算値とでは最大 880 toises ($\approx$ 1.7 km) ほどの差があることがわかる.

φ	r (Lalande) ①	r ($f=1/179$) ②	① - ②
0°	3281012	3281012	0
10	3280572	3280467	105
20	3279263	3278895	368
30	3277155	3276479	676
40	3274377	3273503	874
50	3271202	3270321	881
60	3268017	3267317	700
70	3265252	3264858	394
80	3263396	3263248	148
90	3262688	3262688	0

表 2. 地心距離 (単位は toise ; 1 toise $\approx$ 1.95 m)

4. 子午線 1 度の長さ……ボイスの誤り

ボイス『新修学芸百科事典』第 1 巻, p.35 に緯度 10° ごとの子午線 1 度の長さの表が掲げられている ([2]).

Breedte.	0.	10°.	20°.	30°.	40°.	50°.
Myl in een }						
Graad.	60.	59, 5.	59, 57.	59, 67.	59, 8.	59, 93.
Breedte.	60°.	70°.	80°.	90°.		
Myl in een }						
Graad.	60, 6.	60, 16.	60, 235.	60, 26.		

表 3. 子午線 1 度の長さ, 出典[2]

地球は南北がつぶれた回転楕円体であるので, 緯度が高くなるにつれて子午線 1 度の長さは長くなる. ところが, ボイスの表では赤道での長さが 10° や 20° での長さよりも長くなっている. 高橋至時はこの誤りに気づき, 1 度の平均の長さを 60 として, 赤道および北極における 1 度の長さとして次のような式を与えている ([1], p.170).

$$\frac{60 \text{ 里}}{\text{長径率}^2} = \text{赤道下 1 度里数}, \text{長径率} \times 60 \text{ 里} = \text{北極下 1 度里数}, \left(\text{長径率} = \frac{a}{b} = \frac{1}{m} \right)$$

この式から, 高橋至時は $a = 230, b = 229$ (扁平率 = $1/230$) とおいて ([1], p.170),

$$\text{赤道下 1 度の長さ} = 59.479, \quad \text{北極下 1 度の長さ} = 60.264$$

を得た. ボイスの表では 60° における 1 度の長さを 60.6 と誤記しているが, 至時はこれも 60.06 と訂正している.

天文緯度 φ における子午線 1 度の長さは (3) の第 2 式より

$$\text{子午線の曲率半径} \times (\pi/180) = \frac{a m^2}{(1 - (1 - m^2) \sin^2 \varphi)^{3/2}} \times \frac{\pi}{180} \quad (6)$$

である。この式より

$$\text{赤道下1度の長さ} = \frac{\pi a}{180} m^2, \quad \text{北極下1度の長さ} = \frac{\pi a}{180} \frac{1}{m}, \quad \left(\frac{1}{m} = \text{長径率} \right)$$

これと至時の式とを比べて、至時のいう平均の1度の長さは $\pi a/180$ (= 60) であること、したがって赤道半径を平均半径と見なしていることがわかる。

表4は子午線1度の長さとして、 $f=1/230$ と $f=1/179$ の場合に $\pi a/180 = 60$ として(4)より求めた値と、ボイスおよび上原 ([4], p.155)の値を比較したものである。上原は、赤道での1度の長さは 59.49 が正しいとしているが、至時が得た 59.479 が正しい。

φ	ボイス	上原	$f=1/230$	$f=1/179$
0°	60.00	59.49	59.479	59.331
10	59.50	59.50	59.503	59.361
20	59.57	59.57	59.570	59.448
30	59.67	59.67	59.673	59.580
40	59.80	59.80	59.801	59.744
50	59.93	59.94	59.937	59.918
60	60.06	60.07	60.065	60.083
70	60.16	60.17	60.170	60.218
80	60.235	60.24	60.238	60.306
90	60.26	60.26	60.262	60.337

表 4. 子午線1度の長さの比較

ボイスの第1巻 p.34 下から3行に "… als in den Evenaar een Graad uit 60 Mylen bestaat, de Mylen in de onderscheidene Breedten aldus zyn zullen :" (赤道における1度が60マイルであるとすれば、異なるいくつかの緯度におけるマイルは次のようになる) とあるので、本来ボイスの表は赤道での1度の長さを60マイルとしたものであるはずである。また、同じページの後半部に扁平率は $1/179$ になることが説明されているので、各緯度での値は扁平率を $1/179$ として計算した値になっていなければいけないはずである。しかし、0°以外での値を比較して見ると、ボイスの表は $\pi a/180 = 60$, $f=1/230$ として計算した値と一致している。至時が扁平率を $1/179$ としないで $1/230$ とした問題に関しては上原も取り上げている ([4], pp.152 - 155)。

5. 至時による子午線1度の長さの計算式

和算において、橢円周問題は石黒信由および坂部広胖によって独立に解決された；文化年間のことである ([5], pp.125 - 127). 高橋至時が亡くなったのは享和4年1月5日であるので、彼は石黒等による橢円周問題の解法は知らなかった。

彼は橢円周上の天文緯度1度の長さを次のようにして求めた ([1], p.170).

橢円周上の点 P の天文緯度を φ とし、 $\varphi_1 = \varphi - 0.5^\circ$, $\varphi_2 = \varphi + 0.5^\circ$ となる点をそれぞれ P_1, P_2 とする. φ_1, φ_2 に対応する更成緯度を (2) 第1式から求める；それをそれぞれ θ_1, θ_2 とすると $\angle S_1OA = \theta_1$, $\angle S_2OA = \theta_2$ である.

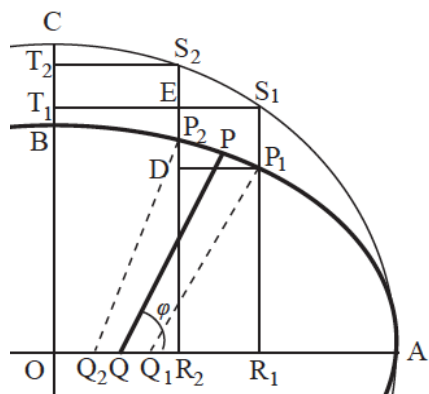


図4. 1度の橢円弧

直角三角形 P_1P_2D において

$$P_1D = S_1E = S_1T_1 - S_2T_2 = a(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$P_2D = P_2R_2 - P_1R_1 = mS_2R_2 - mS_1R_1 = ma(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

これから弦 P_1P_2 が得られる. これは、誤差を無視すれば 橢円弧 P_1PP_2 に等しい.

半径 a の円の、 1° の弦の長さを l とすれば

$$l = a \times (2 \times \sin 0.5) \quad \therefore \quad a = l \div (2 \times \sin 0.5)$$

至時は $l = 60$ 里 (= 至時のいう、1度の平均の長さ) として a を定めている.

表5は $a = 3437.79$, $m = 229/230$ の場合の1度の長さを、至時による計算方法、子午線の曲率半径および橢円積分によって求めて比較したものである.

φ	ボイス	高橋の式	曲率半径	橢円積分
0°	60.00	59.479	59.479	59.480
10	59.50	59.503	59.503	59.506
20	59.57	59.570	59.570	59.575
30	59.67	59.673	59.673	59.680
40	59.80	59.801	59.801	59.808
50	59.93	59.937	59.937	59.944
60	60.06	60.065	60.065	60.071
70	60.16	60.170	60.170	60.175
80	60.235	60.238	60.238	60.241
90	60.26	60.262	60.262	60.263

表5. 子午線1度の長さの比較

これを見れば、高橋の計算方法は曲率半径による計算と小数3位まで一致していることがわかる。ただし、楕円積分とは小数3位で異なっている。

参考文献

- [1] 中山茂, ラランデ暦書管見(抄), 『洋学 下』日本思想体系 64, 岩波書店, 1976
- [2] ボイス, エフベルト(Buys, Egbert), 1769 - 1778, 『新修学芸百科事典』全10巻
(Nieuw en vollkomen woordenboek van konsten en weetenschappen)
<http://www.dbnl.org/auteurs/auteur.php?id=buys003>
- [3] Strabbe, Astronomia of Sterrekunde, 第3巻, 1777, https://books.google.co.jp/books?id=AsVkAAAACAAJ&hl=ja&source=gbs_book_other_versions
- [4] 上原久, 高橋景保の研究, 講談社, 1977
- [5] 平山諦, 和算の歴史, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2007